Mouvements collectifs d'entités actives

B. Maury
LMO, Université Paris-Sud & DMA (ENS Paris)

avec S. Faure & J. Venel

JNRR, novembre 2015

Mouvement de foules

Paradigme :

Foule = collection d'individus dont le mouvement est régi par

- des projets purement individuels, qui peuvent être les mêmes (personnes interchangeables) ou distincts (ex. : adultes informés qui cherchent à sortir au plus vite d'un bâtiment, enfants qui cherchent à rester près de leurs parents).

- des tendances sociales : l'individu adapte son comportement en fonction de la perception qu'il a de son environnement immédiat. Ces tendances peuvent être arrangeantes (politesse), non arrangeantes (agressivité), tactiques, ...

- des interactions directes (contact physique) entre individus, ou avec des obstacles passifs.

Mouvement de foules

Travaux fondateurs de D. Helbing, dans les années 90. Individus assimilés à des particules inertielles, soumises aux lois de Newton (notion de *force sociale*).

Nombreux travaux sur des modèles de type Automates Cellulaires (Blue & Adler, Burstedde & Schadschneider, Nagel,)

Explosion du nombre de modèles macroscopiques proposés (dont certains sont inspirés du trafic routier).

Spécificité : phénomènes *Faster is Slower* ou *Capacity Drop*, *Stop and Go waves*, ...

Mouvement de foules

Cœur de cet exposé : modèle *glouton*

On écarte le point 2 (tendances sociales), pour se ramener au mouvement d'entités qui cherchent à atteindre un certain objectif, et qui subissent la présence d'autres entité semblables comme une *contrainte*. Les entités n'ont qu'une perception très limitée de leur entourage.

1) Ces principes d'évolution conduisent-ils à ce que chacun finisse par réaliser son objectif (avec éventuellement un allongement du temps de réalisation) ?

2) Dans le cas contraire, est-il possible de définir des règles (*réalistes*) de comportement individuel qui permettent une meilleure efficacité du processus ?

On se concentrera sur l'évacuation au travers d'une porte étroite.

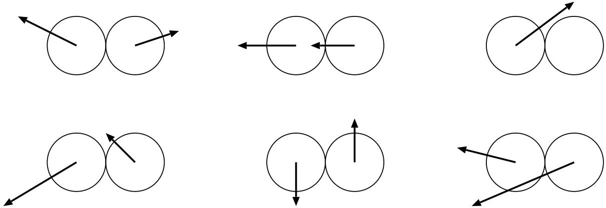
Rque : le problème de planification associé ne présente pas d'intérêt. La présence d'un superviseur omniscient rend le problème quasiment trivial.

Modèle glouton

On note $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_N$ les positions des centres des entités (des disques de rayon r). L'ensemble des configurations admissibles est

$$K = \{\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_N)\,,\ |\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i| - 2r \geq 0 \quad \forall i \neq j.\}$$

Ensemble des vitesses admissibles $C_K(\mathbf{q})$: ensemble des vitesses compatibles avec la contrainte de non chevauchement :

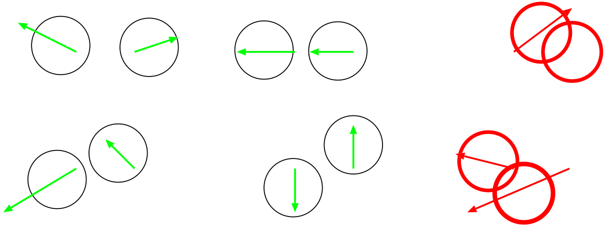


Modèle glouton

On note $\mathbf{q}_1$, …, $\mathbf{q}_N$ les positions des centres des entités (des disques de rayon r). L'ensemble des configurations admissibles est

$$K = \{\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_N)\,,\ |\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i| - 2r \geq 0 \quad \forall i \neq j.\}$$

Ensemble des vitesses admissibles $C_K(\mathbf{q})$: ensemble des vitesses compatibles avec la contrainte de non chevauchement :



Modèle glouton

On note $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_N$ les positions des centres des entités (des disques de rayon r). L'ensemble des configurations admissibles est

$$K = \{\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_N)\,,\ |\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i| - 2r \geq 0 \quad \forall i \neq j.\}$$

Ensemble des vitesses admissibles $C_K(\mathbf{q})$: ensemble des vitesses compatibles avec la contrainte de non chevauchement :

On définit pour chaque individu sa *vitesse souhaitée* $\mathbf{U}_i$.

On définit simplement la vitesse effective comme la projection de la vitesse souhaitée sur l'ensemble des vitesses admissibles :

$$\mathbf{u} = P_{C_K(\mathbf{q})}.$$

Formulation point-selle

$$\mathcal{C}_{\mathbf{q}} = \{\mathbf{v}\,,\ \mathbf{G}_{ij}\cdot\mathbf{v} \geq 0 \quad \text{dès que} \quad D_{ij}(\mathbf{q}) = 0\}\ ,\ \mathbf{G}_{ij} = \nabla D_{ij},$$

$$\mathcal{N}_{\mathbf{q}} = \mathcal{C}_{\mathbf{q}}^{\circ} = \left\{-\sum_{i<j}\lambda_{ij}\mathbf{G}_{ij}\,,\ \lambda_{ij}\geq 0\,,\ D_{ij} > 0 \Rightarrow \lambda_{ij} = 0\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathbf{u} & = & \mathbf{U} + \displaystyle\sum_{i<j}\lambda_{ij}\mathbf{G}_{ij} \\ -\mathbf{G}_{ij}\cdot\mathbf{u} & \leq & 0 \quad \text{quand } D_{ij}(\mathbf{q}) = 0 \\ \lambda_{ij} & \geq & 0 \\ \lambda_{ij}\left(\mathbf{G}_{ij}\cdot\mathbf{u}\right) & = & 0. \end{array}\right.$$

$$\text{Formulation matricielle} \quad \left\{\begin{array}{lcl} \mathbf{u} + B^{\star}\lambda & = & \mathbf{U} \\ B\mathbf{u} & \leq & 0 \\ \lambda & \geq & 0 \\ (B\mathbf{u}, \lambda) & = & 0. \end{array}\right.$$

Modèle glouton

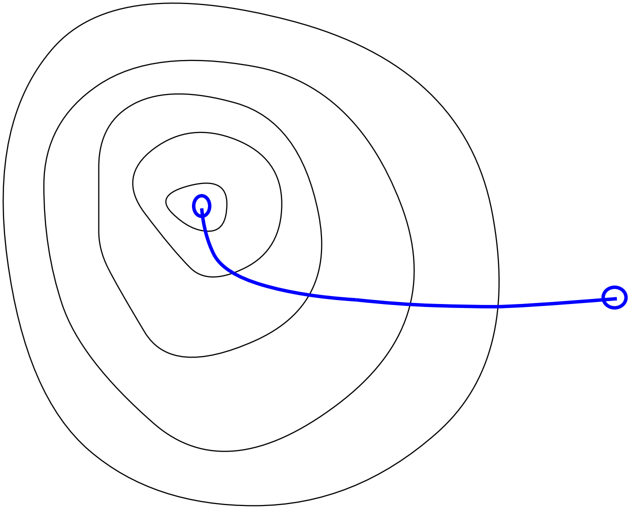
Interprétation mécanique : chaque entité i exerce une force sur un support rugueux, qui lui permet d'avancer à la vitesse $\mathbf{U}_i$ s'il n'y a pas d'obstacle ni de voisin. Dans le cas d'un contact, les vitesses résultent du bilan des forces motrices et des forces de contact.

Dans certaines situations, ce processus conduit à ce que chaque entité finisse par atteindre son but, certaines étant ralenties, mais d'autres pouvant être accélérées.
Exemple : salle avec obstacles

Dans d'autres situations plus “tendues”, les résultats sont catastrophiques :
Évacuation (J. Venel)

Flot de gradient

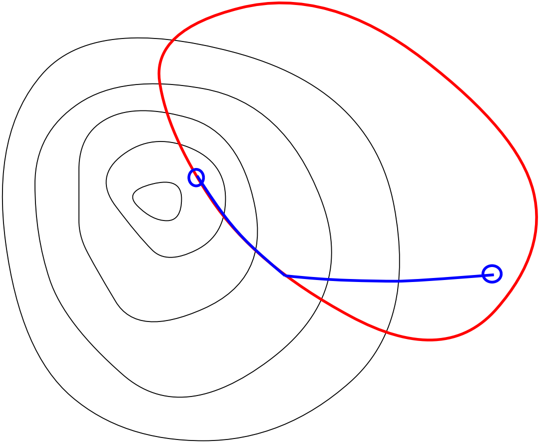
Mouvement selon la ligne de plus grande pente.



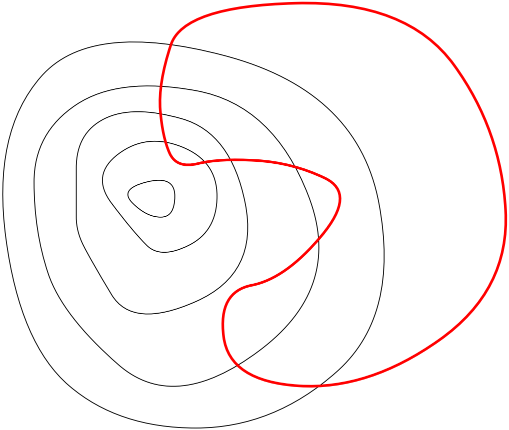
FLOT DE GRADIENT

Rencontre avec un obstacle : le point *fait au mieux*, i.e. prend, parmi les vitesses possibles, la plus proche de sa vitesse souhaitée.

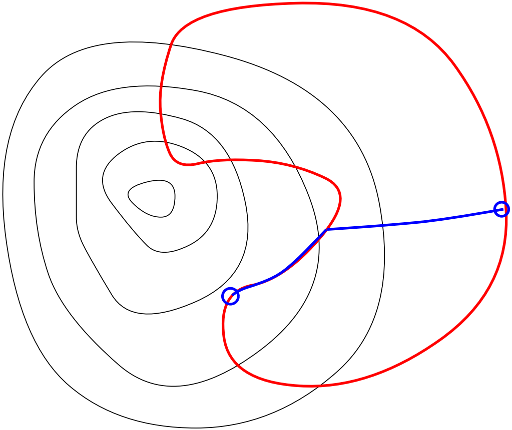
On suppose que le point *connait* la direction à suivre, mais n'anticipe pas les obstacles : l'obstacle agit alors en exerçant une force qui dévie sa trajectoire.



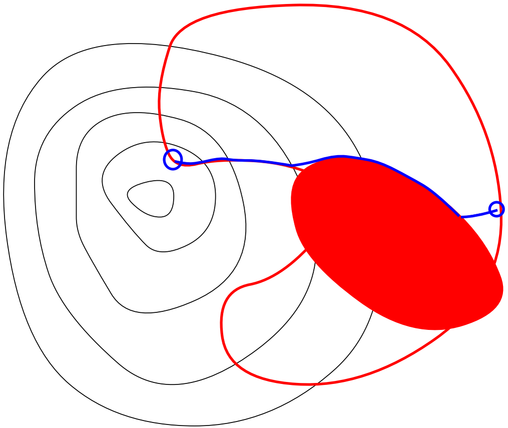
Cas non convexe



Cas non convexe



Cas non convexe (avec un obstacle)



Flot de gradient

Application brutale de ce principe à la foule.

On conçoit la foule comme une entité unique, dans un espace de grande dimension (deux fois le nombre de personnes), qui glisse selon la ligne de plus grande pente de *son insatisfaction*, en étant assujettie à demeurer dans l'espace des configurations *possibles* (i.e. sans chevauchement).

Insatisfaction globale = somme des insatisfactions individuelles,

On rajoute un terme qui prend une très grande valeur en cas de chevauchement

Dans le cas d'une évacuation : instatisfaction proportionnelle à la distance à la sortie.

$$\Psi(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{N} D(\mathbf{q}_i) + I_K(\mathbf{q})$$

où $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_N)$ est le vecteur des positions .

On peut définir proprement (avec un peu de travail), le flot de gradient associé à une telle fonctionnelle.

Flot de gradient

Dans le cas d'une personne seule rencontrant un obstacle, ce dernier exerce une force répulsive.

Ici, les obstacles sont à la fois externes (murs, piliers, etc ...), mais aussi internes (contrainte de non chevauchement).

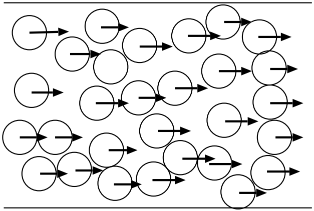
Pour ces derniers, ce qui joue le rôle de la force de réaction est une collection de forces d'interaction entre les personnes en contact.

Tendances individuelles compatibles (foule canalisée) $\longrightarrow$ forces pas activées.

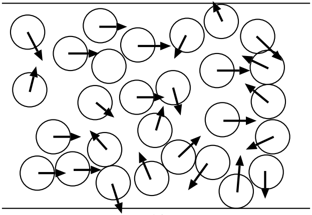
Tendances individuelles contradictoires (flux contraires), ou en compétition (objectif commun, mais foule non canalisée)
$\longrightarrow$ contraintes fortement sollicitées

La collection d'entités se comporte comme une entité unique, dans un espace de grande dimension, dans un paysage extrêmement contraint et complexe (labyrinthe), avec des impasses (minimum local de la fonction d'insatisfaction).

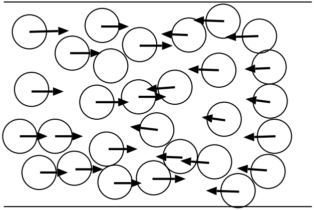
FLOT DE GRADIENT



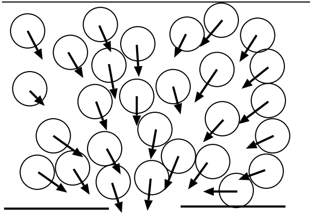
Ordre total



Anarchie

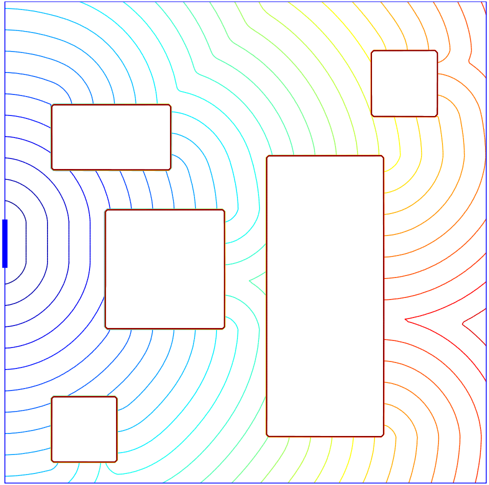


Ordre partiel



Compétition

Flot de gradient



ILLUSTRATIONS

Rappel de la fonction d'insatisfaction :

$$\Psi(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{N} D(\mathbf{q}_i) + I_K(\mathbf{q})$$

Salle avec obstacles

Centre Parisien

Évacuation d'une salle étoilée (J. Venel)

Évacuation avec obstacle (J. Venel)

Flux contraires

Bouchon

FLUIDIFICATION

On cherche à concevoir des stratégies individuelles *réalistes* (une personne modifie son comportement en fonction d'informations locales) pour fluidifier l'écoulement.

Fonction d'insatisfaction modifiée

$$\Psi(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{N} \beta_i D(\mathbf{q}_i) + I_K(\mathbf{q})$$

Protocole : chaque entité a la capacité d'évaluer la réalisation de ses aspirations

$$\text{Frustration } f_i = 1 - \frac{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{U}_i}{|\mathbf{U}_i|^2}.$$

Egale à 0 lorsque l'entité fait ce qu'elle souhaitait faire, à 1 lorsqu'elle est bloquée. Lorsque la frustration se rapproche de 1, et lorsque l'entité a des gens devant elle (dans son cône de vision, centré sur la direction de la vitesse souhaitée), elle *abaisse* son coefficient β_i

Illustrations :
Bouchon, Fluidification du bouchon

Additional examples

Métro micro

Sidewalk

Some smart blue guys

Many smart blue guys

Micro swimmers, weak turbulence (with A. Decoene & S. Martin)